$$Z_2(t) \equiv Z_2(0) = h_0, \tag{22}$$

$$Z_1(t) = \left[\left(K_0^{1-\beta} - \frac{A h_0^{1+\gamma-\beta} u_0^{1-\beta}}{\kappa + \frac{\rho}{\beta}}\right) e^{-(1-\beta)\left(\kappa+\frac{\rho}{\beta}\right)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{A h_0^{1+\gamma-\beta} u_0^{1-\beta}}{\kappa + \frac{\rho}{\beta}}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{23}$$

Соответствующая равновесной траектории последовательность точек $(Z_1(t), Z_2(t) \equiv h_0)$ сходится к стационару $(Z_1^*(h_0), h_0)$, лежащему на кривой (12); функция $Z_1^*(h_0)$ возрастает.

Отсюда следует, что страна, изначально менее богатая человеческим капиталом, каким бы большим физическим капиталом она ни располагала, двигаясь по равновесной траектории, будет на большом промежутке времени отставать по обоим видам капитала от страны, изначально более богатой человеческим капиталом.

Равновесные траектории в случае $\gamma < \beta$ схематически показаны на рис. 2.

4 . Случай $\sigma = \beta = \gamma$

Уравнение (13) при $\gamma = \beta$ принимает вид

$$\dot{u} = u\frac{(\lambda + \delta - \rho)}{\beta}. \tag{24}$$

Решением является функция

$$u(t) = u_0 e^{\frac{(\lambda+\delta-\rho)}{\beta}t}.$$

В случае $\lambda + \delta - \rho > 0$ управление $u(t)$ при достаточно больших t выходит за пределы допустимой области $(0, 1]$. В случае $\lambda + \delta - \rho < 0$ имеет место $u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, и, как и в доказательстве теоремы, нарушается условие трансверсальности (11).

Таким образом, чтобы равновесные траектории существовали, следует, наряду с $\sigma = \beta = \gamma$, предполагать, что $\lambda + \delta - \rho = 0$. Тогда решением уравнения (24) является произвольное постоянное управление u. Тем самым, мы имеем при $\gamma = \beta$, $\rho = \lambda + \delta$ континуум равновесных траекторий, заиндексованных величиной $u \in (0, 1]$.

Зафиксируем некоторое управление $\bar{u}$. Решением уравнения (3) является функция

$$h(t) = h_0 e^{\nu(\bar{u})t},$$

где $\nu(\bar{u}) = \delta(1-\bar{u})$. Определим фазовые переменные $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ согласно (6). Очевидно, что

$$Z_2(t) \equiv h_0. \tag{25}$$

Согласно (18)

$$\frac{\dot{Z}_1}{Z_1} = AZ_1^{\beta-1} h_0 \bar{u}^{1-\beta} - \left(\kappa(\bar{u}) + \frac{\rho}{\beta}\right).$$

Приходим к уравнению Бернулли

$$\frac{\dot{Z}_1}{Z_1^{\beta}} + \left(\kappa(\bar{u}) + \frac{\rho}{\beta}\right) Z_1^{1-\beta} = Ah_0\bar{u}^{1-\beta},$$

общим решением которого является функция

$$Z_1(t) = \left[Ce^{-(1-\beta)(\kappa(\bar{u})+\rho/\beta)t} + \frac{Ah_0\bar{u}^{1-\beta}}{\kappa(\bar{u})+\rho/\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Имеет место сходимость

$$Z_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} Z_1^*(h_0,\bar{u}) = \bar{u}\left[\frac{Ah_0}{\kappa(\bar{u})+\rho/\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Это означает, что траектория $(Z_1(t), Z_2(t))$ сходится к точке на кривой (12); в данном случае

$$B(\bar{u}) = \left(\frac{A}{\kappa(\bar{u})+\rho/\beta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \qquad \alpha = \frac{1}{1-\beta}.$$

Укажем частное решение, соответствующее конкретному K_0. Полагая $t=0$, находим $C = K_0^{1-\beta} - (Z_1^*(h_0,\bar{u}))^{1-\beta}$. Таким образом,

$$Z_1(t) = \left\{ \left[K_0^{1-\beta} - (Z_1^*(h_0,\bar{u}))^{1-\beta}\right] e^{-(1-\beta)(\kappa(\bar{u})+\rho/\beta)t} + \right.$$

$$\left. + Z_1^*(h_0,\bar{u})^{1-\beta}\right\}^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Иными словами,

$$\left[Z_1(t)^{1-\beta} - (Z_1^*(h_0,\bar{u}))^{1-\beta}\right] = \left[K_0^{1-\beta} - Z_1^*(h_0,\bar{u})^{1-\beta}\right] e^{-(1-\beta)(\kappa(\bar{u})+\rho/\beta)t}$$

т. е. отклонение величины $Z_1(t)$ от стационарного значения монотонно сходится к нулю. Как стационарное значение, так и скорость экспоненциальной сходимости возрастают с увеличением $\bar{u}$. Наоборот, темп роста человеческого капитала $\nu(\bar{u})$ и асимптотический темп роста физического капитала $\kappa(\bar{u}) + \lambda$ убывают по $\bar{u}$. Таким образом, сходимость к состояниям с более высокими темпами роста происходит более медленно.

Таким образом, для каждого начального состояния (K_0, h_0) существует континуум равновесных траекторий, обладающих различными темпами роста. При этом, хотя последовательности темпов роста физического и человеческого капиталов при уменьшении $\bar{u}$ ограничены сверху (их пределы при $u \to 0$ равны, соответственно, $\delta/(1-\beta) + \lambda$ и δ) верхние границы не достигаются. Это означает, что равновесную траекторию с долей времени в материальном производстве, равной u, можно опередить не только по уровням, но и по темпам роста, исходя из любого начального состояния, если затрачивать большую, чем $(1-u)$ долю времени на накопление человеческого капитала.

На рис. 3 изображены схематически траектории, построенные при помощи трех постоянных управлений $\bar{u}$, u_1, u_2, где $u_1 < \bar{u} < u_2$. Фазовые траектории с управлением u_2 сходятся к началу координат, а траектории с управлением u_1 уходят на бесконечность.

Если фазовые координаты будут определены посредством управления u_1, то на соответствующей диаграмме траектории с управлениями $\bar{u}$, u_2 будут сходиться к началу координат.

Список литературы

1. R.E.Lucas. On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics. 1988. V.22, No.1. P.3–42.

2. C.B.Mulligan, X.Sala-i-Martin. Transitional dynamics in two-sector models of endogenous growth // Quarterly Journal of Economics. 1993. V.108. P.736–774.

3. J.Benhabib, R.Perli. Uniqueness and indeterminacy: on the dynamics of endogenous growth // Journal of Economic Theory. 1994. V.63. No.1. P.113–142.

4. D.Xie. Divergence in economic performance: transitional dynamics with multiple equilibria // Journal of Economic Theory. 1994. V.63. No.1. P.97–112.

Доказательство предложения 1. Согласно (2) темп роста капитала равен

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{Y(t)}{K(t)} - \frac{N(t)c(t)}{K(t)} = e^{g_1 t}\frac{Y(0)}{K(0)} - e^{g_2 t}\frac{N(0)c(0)}{K(0)},$$

где g_1 – темп роста фондоотдачи, $Y(t)/K(t)$; g_2 – темп роста потребления на единицу капитала, $N(t)c(t)/K(t)$. Поскольку темп роста капитала постоянен (и строго положителен), правая часть не зависит от времени. Нетрудно показать, что это возможно лишь при выполнении равенства $g_1 = g_2 = 0$, т. е. величины Y, K, Nc растут одинаковым темпом, равным $\kappa + \lambda$, где λ, κ – темпы роста величин N и c соответственно.

Польуясь равенством $h = h_a$ и переходя в (1) к темпам роста, получаем равенство

$$\kappa + \lambda = \beta(\kappa + \lambda) + (1 - \beta + \gamma)\nu + (1 - \beta)\lambda,$$

откуда непосредственно следует (5).

Доказательство леммы 1.

$$\frac{\dot{Z}_2}{Z_2} = -\bar{\nu} + \frac{\dot{h}}{h} = -\delta(1 - \bar{u}) + \delta(1 - u) = \delta(\bar{u} - u).$$

Доказательство предложения 2. Имеем

$$\frac{k(t)}{h(t)^\alpha} = \frac{K(t)}{N(0)e^{\lambda t}h(t)^\alpha} = \frac{e^{(\bar{\kappa}+\lambda)t}Z_1(t)}{e^{\lambda t}e^{\alpha\bar{\nu}t}Z_2(t)^\alpha},$$

но, с учетом (5), $\bar{\kappa} + \lambda - \alpha\bar{\nu} = \lambda$, поэтому $k(t)/h(t)^\alpha = \bar{u}B(\bar{u})$.

Доказательство леммы 2. Переписывая решение (16) в виде

$$u(t) = \frac{u^* e^{u^*((\gamma-\beta)\delta/\beta)t}}{u^*/u_0 - 1 + e^{u^*((\gamma-\beta)\delta/\beta)t}},$$

убеждаемся, что $u(t)$ для каждого t является возрастающей функцией начального управления u_0.

Доказательство леммы 3. Перепишем решение (16) в виде

$$u(t) = \frac{u_0 u^*}{\dfrac{u^* - u_0}{e^{u^*(\gamma-\beta)\delta/\beta t}} + u_0}.$$

Пусть $\gamma > \beta$ ($\gamma < \beta$). Тогда при $u^* - u_0 > 0$ величина $u(t)$ возрастает (убывает) по t; при $u^* - u_0 < 0$ величина $u(t)$ убывает (возрастает) по t. Равенство $u(t) \equiv u^*$ при $u_0 = u^*$ легко получить из (16).

Доказательство леммы 5.

$$\frac{\dot{Z}_1}{Z_1} = -(\bar{\kappa} + \lambda) + \frac{\dot{K}}{K} = -(\bar{\kappa} + \lambda) + AK^{\beta-1}u^{1-\beta}N^{1-\beta}h^{1+\gamma-\beta} - \frac{Nc}{K} =$$

с учетом леммы 4 и (6)

$$= -\bar{\kappa} + AZ_1^{\beta-1}Z_2^{1+\gamma-\beta}u^{1-\beta}e^{at}N(0) - \frac{\rho}{\beta},$$

где $a = (\bar{\kappa} + \lambda)(\beta - 1) + \bar{\nu}(1 + \gamma - \beta) + \lambda(1 - \beta)$. С учетом (17), $a = 0$.

Доказательство леммы 6. 1. Согласно (16)

$$\frac{u(t)}{u_0} = \frac{u^* e^{u^*((\gamma-\beta)\delta/\beta)t}}{u^* + u_0\left(e^{u^*((\gamma-\beta)\delta/\beta)t} - 1\right)}.$$

Поскольку $e^{u^*((\gamma-\beta)\delta/\beta)t} - 1 > 0$, функция $u(t)/u_0$ убывает по u_0 при любом фиксированном t. Отсюда и из (19) следует, что $Z_2(t)$ также убывает по u_0.

2. Доказательство непосредственно следует из леммы 3 и формулы (19).

Доказательство теоремы. Допустим, что $u_0 \neq u^*$. Тогда, согласно лемме 3, $u(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из (3) и (9) следует, что при этом

$$\frac{\dot{\vartheta}_2}{\vartheta_2} + \frac{\dot{h}}{h} \to \rho,$$

т. е. величина $\vartheta_2 h$ имеет асимптотический темп роста, равный ρ, что противоречит условию трансверсальности (11). Следовательно, $u_0 = u^*$.

Из (16) следует (21). Тогда из леммы 1 вытекает тождество $\dot{Z}_2/Z_2 \equiv 0$, и отсюда (22). Подставляя (22) в (18), получаем уравнение Бернулли

$$\dot{Z}_1 = AZ_1^{\beta}h_0^{1+\gamma-\beta}u_0^{1-\beta} - \left(\kappa + \frac{\rho}{\beta}\right)Z_1,$$

решением которого является функция (23).

Проверим условия трансверсальности (10), (11). Из (8) и леммы 4 следует, что

$$\frac{\dot{\vartheta}_1}{\vartheta_1} = -\sigma\frac{\dot{c}}{c} = -\sigma\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{N}}{N}\right) = \beta\left(\lambda - \frac{\dot{K}}{K}\right).$$

Из (23) следует, что $Z_1(t) \to Z_1^*(h_0) = \mathrm{const}$ при $t \to \infty$, следовательно,

$$\frac{\dot{\vartheta}_1}{\vartheta_1} + \frac{\dot{K}}{K} \to \beta\lambda + (1-\beta)(\kappa+\lambda) = \kappa(1-\beta) + \lambda.$$

Преобразуем правую часть, используя выражения (17) и (14). Имеем $\kappa(1-\beta) + \lambda = (1-\beta+\gamma)\nu + \lambda = \rho - \delta u^* < \rho$. Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\dot{\vartheta}_1}{\vartheta_1} + \frac{\dot{K}}{K}\right) < \rho;$$

мы приходим к (10).

Из (3) и (9) непосредственно следует, что

$$\frac{\dot{\vartheta}_2}{\vartheta_2} + \frac{\dot{h}}{h} = \rho - \delta u^* < \rho;$$

мы приходим к (11).

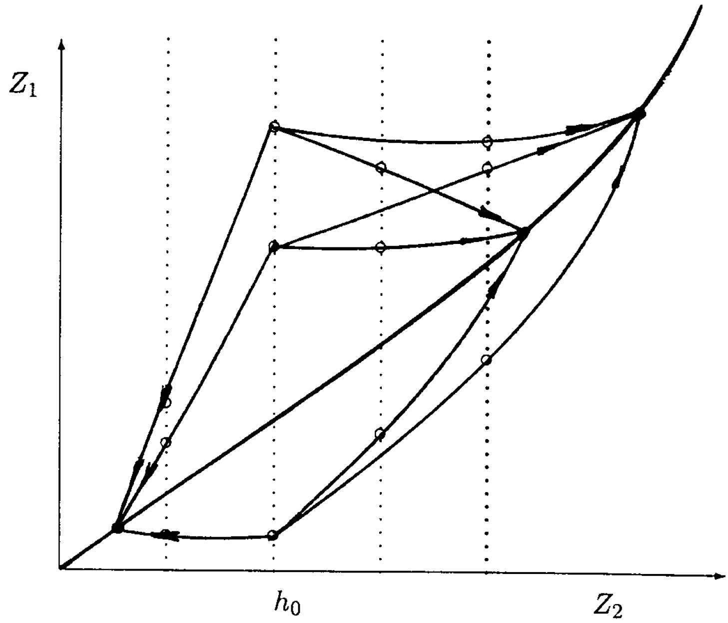

Рис. 1

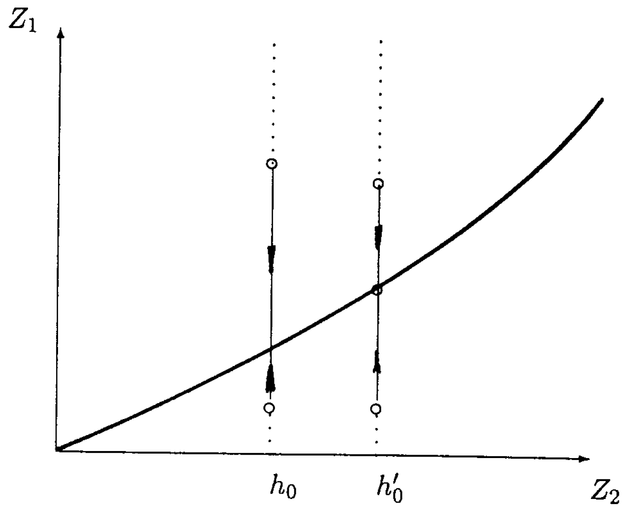

Рис. 2

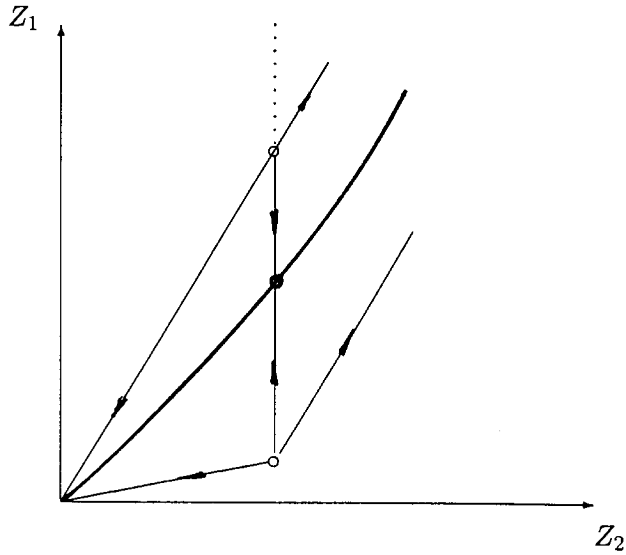

Рис 3.